Beni Hassen ®®®®®®®®®® 2013/2014	**Devoir de synthèse n°3**	
	4 M	
	Prof : **M.Mohamed Krir**	**08/05/2014**

<u>EXERCICE N°1 :(4 points)</u>

1) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par f (x) = $x^3e^{1-x^2}$. On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$).

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Construire la courbe ζ .

2) Soit (U_n) la suite définie sur IN* par $U_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2}dx$

a) Calculer U_1

b) Montrer que pour tout n de IN* on a : $\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire que (U_n) est convergente et trouver sa limite.

4)a)Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de IN* on a :

$$U_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)U_n - \frac{1}{2}$$

b) En déduire l'aire du domaine limité par la courbe ζ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : x = 0 et x = 1 .

<u>EXERCICE N° 2 :(4 points)</u>

Une urne contient trois boules rouges numérotées 1 , 2 , 2 et trois boules blanches numérotées 1 , 1 , 2 . Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne .

1)a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « avoir trois boules de même couleurs »

B : « la somme des nombres inscrits sur les boules tirées est égale à cinq »

b) Soit l'événement C : « avoir au moins une boule rouge qui porte le numéro 2 »

Montrer que $p(C) = \frac{4}{5}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges portant le numéro 2 obtenues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer E(X).

3) On répète l'épreuve précédente n fois ($n \geq 1$) de suite , en remettant après chaque épreuve les boules tirées dans l'urne.

a) Calculer la probabilité p_n , pour que l'événement C soit réalisé au moins une fois.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0{,}99$.

EXERCICE N°3 :(4 points)

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace . On donne les points :

A(1,0,2) ;B(1,-1,0) ;C(2,1,-5) et D(0,1,1).

1)a)Montrer que les point A,B,C et D sont non coplanaires.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A,B et C.

2)Soit S la sphère de centre I(2,-1,2) et de rayon R. Déterminer R pour que P soit tangent à S

3) Soit h l'homothétie de centre w et de rapport $k \prec 0$. On donne $A'(1,0,\frac{5}{3}) = h(A)$ et on désigne par B',C'et D' les images respectives des points B,C et D par h.

a) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

b) Soit V' la mesure du volume du tétraèdre A'B'C'D'.

Déterminer le rapport k de h sachant que : $V' = \frac{16}{27}$.

c) Déterminer les coordonnées du point w.

4) On désigne par P’ et S’ les images respectives du plan P et la sphère S par h.

a) Donner une équation du plan P’.

b) Caractériser l’ensemble : $P' \cap S'$.

EXERCICE N°4 :(4 points)

1)a) Déterminer le reste modulo 11 de 6^{10}.

b) Déterminer le reste modulo 5 de 6^4

c) En déduire que : $6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$ et $6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$

d) Etablir alors que : $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2) a) Montrer que l’équation (E) : $65x - 40y = 1$ n’a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Montrer que l’équation (E’) : $17x - 40y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

c) Déterminer à l’aide de l’algorithme d’Euclide une solution particulière de (E’). Résoudre alors cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.

d) En déduire qu’il existe un unique entier positif x_0 inférieur à 40 tel que: $17x_0 \equiv 1 \pmod{40}$

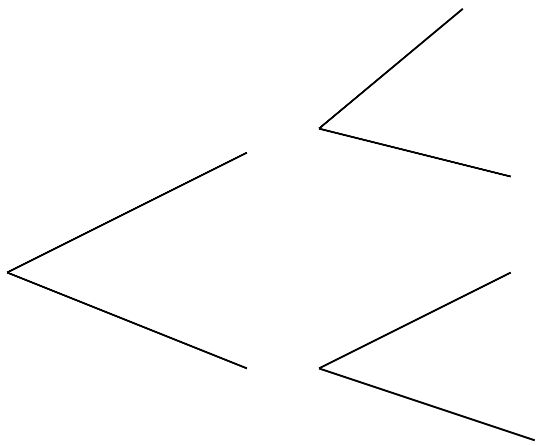
3) Montrer que si : $a^{17} \equiv b \pmod{55}$ et $a^{40} \equiv 1 \pmod{55}$ alors $b^{33} \equiv a \pmod{55}$, a et b dans IN.

BON TRAVAIL

Nom : …………………..   Prénom :……………..

EXERCICE N°4 :(4 points)

1) a)Compléter l'arbre de probabilité suivante



b) Déterminer x sachant que p(B) = $\frac{9}{25}$.

…….

…….

2) Le tableau statistique suivant , X désigne le nombre de jours après la naissance d'un nourrisson et Y la masse en kg.

X (en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y (en kg)	3,6	3,75	3,80	3,90	4	4,25	4,5

a) Soit r le coefficient de corrélation linéaire de X et Y

r = ……………………………………….=…………………………………………………………….

b) Interpréter :

………..

c) Donner une équation de la droite $D_{Y/X}$ de régression de Y en X

$D_{Y/X}$: Y = ……………………………………………………………… ……………………………..

d) Quelle pourrait être la masse du nourrisson après 30 jours de sa naissance ?

………..

3) Soit l'équation différentielle (E) : y'' + 9 y = 0 .

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies par :

- ☐ f(x) = a cos(3x) + b sin(3x) , a et b réels
- ☐ f(x) = a cos(9x) + b sin(9x) , a et b réels
- ☐ f(x) = 3 cos(ax) +3 sin(bx) , a et b réel

feuille à rendre avec la copie